



TITLE:

インフレ変動と人的資本を考慮した動的アセットアロケーション (ファイナンスの数理解析とその応用)

AUTHOR(S):

栗山, 寛

CITATION:

栗山, 寛. インフレ変動と人的資本を考慮した動的アセットアロケーション (ファイナンスの数理解析とその応用). 数理解析研究所講究録 2008, 1580: 245-258

ISSUE DATE:

2008-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81398>

RIGHT:

インフレ変動と人的資本を考慮した 動的アセットアロケーション

栗山 寛

大阪大学経済学研究科

概要

本稿では、連続時間の枠組みにおいて、インフレーション及び所得の変動の存在を、同時に許したアセットアロケーション問題を考える。投資対象は名目資産のみとし、また完備市場の仮定の下で、消費及び期末富からの効用を最大化する個人投資家の、最適消費及び最適投資戦略を解析的に導出する。そして得られた結果を用いて、数値的に比較静学を行うことにより、特に将来のインフレーション及び所得のリスクが変化した場合の個人投資家の最適な消費・投資行動への一つの示唆を与える。

1 はじめに

投資期間が長期に渡る個人投資家にとって、複数のリスク資産、無リスク資産及び消費にどのように富を配分するかというアセットアロケーション問題は重要である。連続時間の枠組みでの長期投資家の最適消費・投資問題に関する研究は Merton (1971) にさかのぼる。Merton (1971) の画期的な研究は、確率的な変動を持つ株式と、無リスク資産が投資対象の場合において、動的計画法のアプローチにより、消費及び期末富からの効用を最大化する長期投資家の最適消費・投資問題に対して、最初に合理的な解答を与えた。そして最適投資戦略が、静的なポートフォリオ理論により得られる近視眼的な項、および確率的に変動する投資環境へのヘッジ項に分けられることを示した。

本稿で扱う、インフレーションおよび個人の所得に関する研究も少なくない。インフレーションに関する最近の研究としては、Brennan and Xia (2002) および Munk, Sørensen, and Vintner (2004) などがある。また個人の所得を扱った最近の研究としては、Viceira (2001), Henderson (2005), Wang (2006) そして Munk and Sørensen (2007) などが挙げられる。

しかし上に挙げた先行研究で、インフレーションおよび所得を同時に扱い、分析したものは見られない。また別個に扱った分析の中でも、インフレーションおよび所得のリスクの変化が、消費・投資戦略に及ぼす影響について、アセットアロケーションの見地より分析したものも見られない。所得およびインフレーションのリスクは、将来変化する可能性が十分あると考えられる。例えば政府の経済政策の転換、転職などが挙げられよう。これらのリスクの変化に際し、個人投資家が消費、複数のリスク資産、および無リスク資産への富の配分を、どのように変化させるべきかという問題は重要である。

本稿では、個人投資家は CRRA 型効用関数を持つと仮定する。またリスク資産として名目株式および名目債券、無リスク資産として銀行預金を投資対象とし、インフレーション及び個人の所得が確率的な変動を持つ場合に、それらを同時に考慮したアセットアロケーション問題を考慮する。そして上記のモデルにおいて、市場の完備性の仮定の下で最適消費、投資戦略を解析的に導出する。また得られた解析解を用いて数値的に比較静学を行い、インフレーションと所得のリスクの変化に対して、投資家が消費、リスク資産および無リスク資産への富の配分を、どのように変化させるべきかについて、一つの示唆を与える。加えて投資期間およびリスク回避度に関しての比較静学により、静的なポートフォリオ理論との整合性を検討する。

以下、第 2 節では投資対象資産、およびインフレーションのモデルを示す。第 3 節では投資家の効用関

数, また最適化問題を示し, 所得は考慮せずインフレーションのみを考慮した場合の価値関数を導出する. 第 4 節では所得のモデルを示し人的資本を導出する. 第 5 節で得られた結果を用いて価値関数, 最適消費および最適投資戦略の解析解を導く. 第 6 節で比較静学を行い, 最後の節で結論を述べる.

2 モデル

本稿を通して, フィルター付き確率空間が定義されているものとする. フィルトレーションは, この章で導入される標準ブラウン運動から生成される, 自然なフィルトレーションを仮定する.

名目短期金利は Vasicek モデルに従うと仮定する.

$$dr_t = \kappa(\bar{r} - r_t)dt - \sigma_r dz_{rt}.$$

$\kappa, \bar{r}, \sigma_r$ はそれぞれ正の定数であり, それぞれ平均への回帰速度, 長期平均金利, 金利の瞬間的なボラティリティを表す. また z_{rt} は市場で観測される確率測度の下での標準ブラウン運動を表す. 従って, 満期 T のゼロクーポン債の名目価格は

$$\begin{aligned} B_t^T &= B^T(r_t, t) = e^{-\alpha(T-t) - b(T-t)r_t}, \\ \alpha(T-t) &= R_\infty[T-t - b(T-t)] + \frac{\sigma_r^2}{4\kappa}b(T-t)^2, \\ b(T-t) &= \frac{1}{\kappa}(1 - e^{-\kappa(T-t)}), \\ R_\infty &= r_t + \frac{\sigma_r \lambda_r}{\kappa} - \frac{\sigma_r^2}{2\kappa^2} \end{aligned}$$

である (例えば Munk et al (2004) 参照). ここで λ_r は金利のリスクの市場価格であり, 定数と仮定する.

本稿では名目債券指数として, 金利の条件付請求権としての全ての満期の債券を, 足し合わせたものを仮定する. 名目債券指数の過程は

$$dB_t = B_t [(r_t + \sigma_B(r, t)\lambda_r)dt + \sigma_B(r, t)dz_{rt}] \quad (1)$$

となる. σ_B は債券指数のボラティリティである.

名目株価指数の過程は

$$dS_t = S_t \left[(r_t + \nu)dt + \sigma_S \left(\rho_{SB} dz_{rt} + \sqrt{1 - \rho_{SB}^2} dz_{st} \right) \right] \quad (2)$$

と仮定する. ここで ν は株価指数の期待超過収益率, σ_S は株価指数のボラティリティ, ρ_{SB} は株価指数と債券との瞬間的な相関係数を表す定数であり, z_S は z_r とは独立な標準ブラウン運動を表す.

この二つの資産をあわせると, 名目資産の価格ベクトル $P_t = {}^t(B_t, S_t)$ の過程を得る.

$$dP_t = \text{diag}(P_t) [(r_t \mathbf{1} + \Sigma(r, t)\Lambda)dt + \Sigma(r, t)dZ_t]. \quad (3)$$

ここで表記の簡略化のために, 2つの独立な標準ブラウン運動を $Z = {}^t(z_r, z_S)$, リスクの市場価格のベクトルを $\Lambda = {}^t(\lambda_r, \lambda_S)$, $\lambda_S = (\nu/\sigma_S - \rho_{SB}\lambda_r)/\sqrt{1 - \rho_{SB}^2}$ と表す. 加えて $\mathbf{1} = {}^t(1, 1)$ であり, Σ は以下で定義される 2×2 の行列である.

$$\Sigma(r, t) = \begin{pmatrix} \sigma_B(r, t) & 0 \\ \sigma_S \rho_{SB} & \sigma_S \sqrt{1 - \rho_{SB}^2} \end{pmatrix}.$$

以下, 市場で取引されるリスク資産は名目債券指数および名目株価指数の 2 資産とする.*1

*1 N 個の株式が市場に存在すると仮定する場合, その n 番目の株式の価格過程は, 独立な N 個の標準ブラウン運動を用いて,

$$dS_{nt} = S_{nt} [(r_t + \nu_n)dt + \sigma_n (\rho_{nB} dz_{rt} + \sum_{j=1}^n \rho_{nj} dz_{jt})]$$

物価指数 I および期待インフレ率 i は、ボラティリティを表す係数を $\sigma_I = {}^t(\sigma_{Ir}, \sigma_{IS})$, 同様に $\sigma_i = {}^t(\sigma_{ir}, \sigma_{is})$ として以下の過程に従うとする。

$$dI_t = I_t[i_t dt + {}^t\sigma_I dZ_t], \quad (4)$$

$$di_t = \beta(\bar{i} - i_t)dt + {}^t\sigma_i dZ_t. \quad (5)$$

β は期待インフレ率の平均回帰速度, \bar{i} は長期平均期待インフレ率を表す正の定数である。このインフレーションモデルは, Brennan and Xia (2002), Munk et al (2004) に見られる。

富に対しての債券及び株式への投資割合を, $\pi = {}^t(\pi_B, \pi_S)$ とすると, 名目富過程は以下の式で表現される。

$$dW_t = W_t[(r_t + {}^t\pi\Sigma(r, t)\Lambda)dt + {}^t\pi\Sigma(r, t)dZ_t]. \quad (6)$$

ここで, 無リスク資産 (銀行預金) への投資割合は, $\pi_M = 1 - \pi_B - \pi_S$ により決定される。

伊藤の公式より, 物価指数で除することにより得られる実質富の過程は,

$$dW_t^* = W_t^*[(r_t + {}^t\pi\Sigma(r, t)\Lambda - i_t + \sigma_I^2 - {}^t\pi\Sigma(r, t)\sigma_I)dt + ({}^t\pi\Sigma(r, t) - {}^t\sigma_I)dZ_t] \quad (7)$$

となる。以下アスタリスクは物価指数により除されていることを表す。

3 価値関数

3.1 期末富

この小節では, 投資家は, 期末の実質富からの効用の最大化が目的であると仮定する。

投資家の持つ効用はべき効用 (CRRA) を仮定する。

$$U(x) = \frac{1}{1-\gamma} x^{1-\gamma}. \quad (8)$$

価値関数は下式で定義される。

$$J(W_t^*, r_t, i_t, t) := \sup_{\pi} E_t[U(W_T^*)], \quad t \in [0, T]. \quad (9)$$

以下簡略化のため, 瞬間的な共分散を表す係数を $C_I = {}^t(c_{IB}, c_{IS}) = \Sigma(r, t)\sigma_I$, $C_i = {}^t(c_{iB}, c_{iS}) = \Sigma(r, t)\sigma_i$, $c_{rI} = -\sigma_r\sigma_{Ir}$, $c_{ri} = -\sigma_r\sigma_{ir}$, $c_{Ii} = {}^t\sigma_i\sigma_I$ と表記する。また $e_1 = {}^t(1, 0)$ とする。

この最適化問題から導かれる Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式 (HJB 方程式) は,

$$\begin{aligned} \sup_{\pi} \left\{ J_t + W^* \mu_{W^*} J_{W^*} + \kappa(\bar{r} - r)J_r + \beta(\bar{i} - i)J_i + \frac{1}{2}(W^*)^2 \sigma_{W^*}^2 J_{W^*W^*} \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\sigma_r^2 J_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_i^2 J_{ii} + W^* \sigma_{W^*r} J_{W^*r} + W^* \sigma_{W^*i} J_{W^*i} + c_{ri} J_{ri} \right\} = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

と表される。ここで ρ_{nB} は n 番目の株式と債券との相関係数であり, h_{nj} は N 個の株式の間の相関を決定する正の定数である。縦に並べて書くと

$$dS_t = \text{diag}(S_t) [(r_t 1 + \nu)dt + \text{diag}(\sigma_S)\{\rho_{SB} dz_{rt} + H dZ_{St}\}]$$

である。 H は $\{h_{nj}\}$ を第 nj 要素に持つ下三角行列である。ここで

$$\Sigma(r, t) = \begin{pmatrix} \sigma_B(r, t) & 0 \\ \text{diag}(\sigma_S)\rho_{SB} & \text{diag}(\sigma_S)H \end{pmatrix}$$

とすることにより $N+1$ 個のリスク資産で (3) 式が表され, 同様の議論が可能であるが, アセットアロケーションという見地より, 本稿では以下 2 資産で議論を進める。

境界条件

$$J(W^*, r, i, T) = \frac{1}{1-\gamma} (W^*)^{1-\gamma} \quad (11)$$

である。ただし J の添字は偏微分を表す。

また係数を以下のように置いた。

$$\mu_{W^*} := r + {}^t\pi\Sigma\Lambda - i + \sigma_I^2 - {}^t\pi C_I, \quad (12)$$

$$\sigma_{W^*}^2 := {}^t\pi\Sigma^t\Sigma\pi + \sigma_I^2 - 2{}^t\pi C_I, \quad (13)$$

$$\sigma_{W^*r} := -\sigma_r({}^t\pi\Sigma - {}^t\sigma_I)e_1, \quad (14)$$

$$\sigma_{W^*i} := {}^t\pi C_i - c_{Ii}. \quad (15)$$

最適性の一階条件より、最適投資戦略を求めると、

$$\begin{aligned} \hat{\pi} = & -({}^t\Sigma)^{-1}\Lambda \frac{J_{W^*}}{W^*J_{W^*W^*}} + \sigma_r({}^t\Sigma)^{-1}e_1 \frac{J_{W^*r}}{W^*J_{W^*W^*}} \\ & + (\Sigma^t\Sigma)^{-1}C_I \frac{J_W^*}{W^*J_{W^*W^*}} + (\Sigma^t\Sigma)^{-1}C_I - (\Sigma^t\Sigma)^{-1}C_i \frac{J_{W^*r}}{W^*J_{W^*W^*}}. \end{aligned} \quad (16)$$

最初の項は Merton (1971) により示された近視眼的な項であり、第2項は金利に対するヘッジ項、第3, 4項は物価指数に対するヘッジ項、最後の項は期待インフレ率に対してのヘッジ項である。

補題 1 価値関数は次の式で与えられる。

$$J(W_t^*, r_t, i_t, t) = \frac{1}{1-\gamma} f(r_t, i_t, t)^\gamma (W_t^*)^{1-\gamma}, \quad (17)$$

$$f(r, i, t) := \exp \left\{ \frac{1-\gamma}{\gamma} a(T-t) + \frac{1-\gamma}{\gamma} b(T-t)r - \frac{1-\gamma}{\gamma} c(T-t)i \right\}. \quad (18)$$

ただし、 $b(T-t), c(T-t)$ は以下で定義される関数である。

$$b(T-t) := \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}), \quad (19)$$

$$c(T-t) := \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta(T-t)}). \quad (20)$$

また、関数 $a(T-t)$ は、上記 $b(T-t), c(T-t)$ を用いて

$$\begin{aligned} a(T-t) := & \left[\frac{M_1}{\kappa} - \frac{M_2}{\beta} + \frac{1-\gamma}{2\gamma} \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} \right)^2 + \frac{1-\gamma}{2\gamma} \left(\frac{\sigma_i}{\beta} \right)^2 - \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{c_{ri}}{\kappa\beta} + M_3 \right] (T-t) \\ & - \left[\frac{M_1}{\kappa} + \frac{1-\gamma}{2\gamma} \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} \right)^2 + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{c_{ri}}{\kappa\beta} \left(\frac{\kappa}{\kappa+\beta} - 1 \right) \right] b(T-t) \\ & + \left[\frac{M_2}{\beta} - \frac{1-\gamma}{2\gamma} \left(\frac{\sigma_i}{\beta} \right)^2 - \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{c_{ri}}{\kappa\beta} \left(\frac{\beta}{\kappa+\beta} - 1 \right) \right] c(T-t) \\ & - \left[\frac{1-\gamma}{4\gamma} \frac{\sigma_r^2}{\kappa} \right] b(T-t)^2 - \left[\frac{1-\gamma}{4\gamma} \frac{\sigma_i^2}{\beta} \right] c(T-t)^2 + \left[\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{c_{ri}}{\kappa+\beta} \right] b(T-t)c(T-t) \end{aligned} \quad (21)$$

と定義される。

ここで、表記の簡略化のために以下のように定義した。

$$\begin{aligned} M_1 &:= \kappa \bar{r} - \frac{1-\gamma}{\gamma} \lambda_r \sigma_r - \frac{1-\gamma}{\gamma} c_{rI}, \\ M_2 &:= \beta \bar{i} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \Lambda \sigma_i - \frac{1-\gamma}{\gamma} c_{Ii}, \\ M_3 &:= \frac{1}{2\gamma} \Lambda^2 - \frac{1-\gamma}{\gamma} \Lambda \sigma_I + \frac{1}{2\gamma} \sigma_I^2. \end{aligned}$$

3.2 期中消費及び期末富

この小節では、投資家は期中の消費及び期末富からの効用を最大化すると仮定する。この時投資家の富の過程は以下で表される。

$$dW_t = W_t [(r_t + {}^t\pi \Sigma(r, t) \Lambda) dt + {}^t\pi \Sigma(r, t) dZ_t] - c_t dt. \quad (22)$$

実質富過程は、(4) 式および伊藤の公式より

$$dW_t^* = W_t^* [(r_t + {}^t\pi \Sigma \Lambda - i_t + \sigma_I^2 - {}^t\pi C_I) dt + ({}^t\pi \Sigma - {}^t\sigma_I) dZ_t] - c_t^* dt \quad (23)$$

となる。このとき、価値関数は、

$$J(W_t^*, r_t, i_t, t) := \sup_{c^*, \pi} E_t \left[w \int_t^T e^{-\delta(s-t)} U(c_s^*) ds + e^{-\delta(T-t)} U(W_T^*) \right], \quad s, t \in [0, T], \quad s \geq t \quad (24)$$

と定義される。 w は正の定数であり、期末富からの効用に対して、連続的な消費からの効用へのウエイトを表す。 $w = 0$ かつ $\delta = 0$ の時、上記の表現は (9) 式に帰着する。^{*2} このとき、補題 1 を基として、以下の補題が導かれる。

補題 2 価値関数は以下の式で与えられる。

$$J(W_t^*, r_t, i_t, t) = \frac{1}{1-\gamma} g(r_t, i_t, t) (W_t^*)^{1-\gamma}. \quad (25)$$

ただし、関数 $g(r, i, t)$ は以下で定義される関数である。

$$\begin{aligned} g(r, i, t) &:= w^{\frac{1}{\gamma}} \int_t^T e^{\phi(r, i, s-t)} ds + e^{\phi(r, i, T-t)}, \\ \phi(r, i, \tau) &:= -\frac{\delta}{\gamma} \tau + \frac{1-\gamma}{\gamma} a(\tau) + \frac{1-\gamma}{\gamma} b(\tau) r - \frac{1-\gamma}{\gamma} c(\tau) i, \quad \tau \in [0, T]. \end{aligned} \quad (26)$$

また、関数 $a(\tau), b(\tau), c(\tau)$ の定義は (19) - (21) 式と同様である。

Brennan and Xia (2002) は、実質金利が Vasicek モデルに従うと仮定し、マルチンゲール法を用いて価値関数を導出した。また Munk et al (2004) は市場の完備性を仮定せずに、株式のドリフトが OU 過程に従うという条件を追加したモデルで、期末富のみからの効用を考慮する投資家を仮定し、価値関数を導出した。

^{*2} 価値関数の表現だけでなく、HJB 方程式、最適投資戦略も一致する。

4 人的資本

所得の過程は、ボラティリティを表す係数を $\sigma_y = {}^t(\sigma_{yr}, \sigma_{yS})$ として、

$$dy_t = y_t[(\xi_0 + \xi_1 r_t)dt + {}^t\sigma_y dZ_t] \quad (27)$$

と表されるものとする。 ξ_0 は定数であり、景気に依存しない所得成長率を表す。また ξ_1 は正の定数であり、金利の上昇と景気の拡大が正の相関を持つことを仮定した上で、景気の動きを示す金利が、所得の成長に及ぼす影響を表すウェイトである。このモデルは Munk and Sørensen (2007) に見られる。

実質所得過程は、(4) 式と伊藤の公式より、

$$dy_t^* = y_t^*[(\xi_0 + \xi_1 r_t - i_t + \sigma_I^2 - c_{yI})dt + ({}^t\sigma_y - {}^t\sigma_I)dZ_t] \quad (28)$$

である。ここで $c_{yI} = {}^t\sigma_I \sigma_y$ は所得と物価指数との瞬間的な共分散を表す。

本論文のモデルにおいては、投資家は、自らの所得のフローを、市場での取引資産によって複製することが出来る。よって人的資本は以下の補題で示される。

補題 3 Q を一意的なリスク中立確率測度とすると、名目人的資本は以下ようになる。

$$\begin{aligned} H(r_t, y_t, t) &= E_t^Q \left[\int_t^T y_s e^{-\int_t^s r_u du} du \right] \\ &= y_t \int_t^T e^{\psi(r_t, s-t)} ds. \end{aligned} \quad (29)$$

ただし、 $\psi(r, \tau)$ は以下で定義される関数である。また、関数 $b(\tau)$ は (19) 式と同様である。

$$\psi(r, \tau) := N_1 \tau - (\xi_1 - 1) N_2 b(\tau) - (\xi_1 - 1)^2 N_3 b(\tau)^2 + (\xi_1 - 1) b(\tau) r, \quad \tau \in [0, T]. \quad (30)$$

ここで、表記の簡略化のために以下のように定義した。

$$\begin{aligned} N_1 &:= \xi_0 - {}^t\sigma_y \Lambda + (\xi_1 - 1) \bar{r} + (\xi_1 - 1) \frac{\sigma_r \lambda_r}{\kappa} + (\xi_1 - 1) \frac{c_{ry}}{\kappa} + \frac{1}{2} (\xi_1 - 1)^2 \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} \right)^2, \\ N_2 &:= \bar{r} + \frac{\sigma_r \lambda_r}{\kappa} + \frac{c_{ry}}{\kappa} + \frac{1}{2} (\xi_1 - 1) \left(\frac{\sigma_r}{\kappa} \right)^2, \\ N_3 &:= \frac{1}{4} \frac{\sigma_r^2}{\kappa}. \end{aligned}$$

したがって、インフレを考慮した実質人的資本は、実質所得を用いて、以下の式で表現される。

$$H^*(r_t, y_t^*, t) = \frac{H(r_t, y_t, t)}{I_t} = y_t^* \int_t^T e^{\psi(r_t, s-t)} ds. \quad (31)$$

Munk and Sørensen (2007) は、景気に依存しない成長率およびボラティリティが、時間の関数であると仮定し、(29) 式をゼロクーポン債の価格を用いて示している。

5 最適戦略

期中消費と労働所得が存在する場合の富の過程は

$$dW_t = W_t [(r_t + {}^t\pi \Sigma(r, t) \Lambda)dt + {}^t\pi \Sigma(r, t) dZ_t] - c_t dt + y_t dt \quad (32)$$

と表現できる。そして (4) 式および伊藤の公式より、実質富の過程が表される。

$$dW_t^* = W_t^* [(r_t + {}^t\pi\Sigma\Lambda - i_t + \sigma_I^2 - {}^t\pi C_I)dt + ({}^t\pi\Sigma - {}^t\sigma_I)dZ_t] - c_t^*dt + y_t^*dt. \quad (33)$$

投資家は、期中消費および期末富からの効用を、最大化すると仮定する。そのとき価値関数は、前記と同様下式で表される。

$$J(W_t^*, r_t, i_t, y_t^*, t) = \sup_{c^*, \pi} E_t \left[w \int_t^T e^{-\delta(s-t)} U(c_s^*) ds + e^{-\delta(T-t)} U(W_T^*) \right], \quad s, t \in [0, T], \quad s \geq t. \quad (34)$$

HJB 方程式は、 $C_y = {}^t(c_{yB}, c_{yS}) = \Sigma\sigma_y$, $c_{ry} = -{}^t\sigma_y\sigma_re_1$ として、

$$\begin{aligned} \sup_{c^*, \pi} \left\{ wU(c^*) - \delta J + J_t + W^* \mu_{W^*} J_{W^*} - c^* J_{W^*} + y^* J_{W^*} + \kappa(\bar{r} - r)J_r + \beta(\bar{i} - i)J_i \right. \\ \left. + y^* \mu_{y^*} J_{y^*} + \frac{1}{2}(W^*)^2 \sigma_{W^*}^2 J_{W^*W^*} + \frac{1}{2}\sigma_r^2 J_{rr} + \frac{1}{2}\sigma_i^2 J_{ii} + \frac{1}{2}(y^*)^2 \sigma_{y^*}^2 J_{y^*y^*} + W^* \sigma_{W^*r} J_{W^*r} \right. \\ \left. + W^* \sigma_{W^*i} J_{W^*i} + c_{ri} J_{ri} + W^* y^* \sigma_{W^*y^*} J_{W^*y^*} + y^* \sigma_{y^*i} J_{y^*i} + y^* \sigma_{y^*r} J_{y^*r} \right\} = 0, \end{aligned}$$

境界条件

$$J(W^*, r, i, y^*, T) = \frac{1}{1-\gamma} (W^*)^{1-\gamma} \quad (35)$$

である。ここで係数を、以前の (12) - (15) 式に加えて以下のように置いている。

$$\begin{aligned} \mu_{y^*} &= \xi_0 + \xi_1 r - i + \sigma_I^2 - c_{yI}, \\ \sigma_{y^*}^2 &= \sigma_y^2 + \sigma_I^2 - 2c_{Iy}, \\ \sigma_{W^*y^*} &= {}^t\pi C_y - {}^t\pi C_I - c_{yI} + \sigma_I^2, \\ \sigma_{iy^*} &= c_{yi} - c_{Ii}, \\ \sigma_{ry^*} &= c_{ry} - c_{rI}. \end{aligned}$$

最適性の一階条件から、最適消費額は

$$\hat{c}^* = w^{\frac{1}{\gamma}} (J_{W^*})^{-\frac{1}{\gamma}} \quad (36)$$

である。一方、最適投資戦略は

$$\begin{aligned} \hat{\pi} &= -({}^t\Sigma)^{-1} \Lambda \frac{J_{W^*}}{W^* J_{W^*W^*}} + \sigma_r ({}^t\Sigma)^{-1} e_1 \frac{J_{W^*r}}{W^* J_{W^*W^*}} \\ &\quad + (\Sigma^t \Sigma)^{-1} C_I \frac{J_{W^*}}{W^* J_{W^*W^*}} + (\Sigma^t \Sigma)^{-1} C_I \frac{y^* J_{W^*y^*}}{W^* J_{W^*W^*}} + (\Sigma^t \Sigma)^{-1} C_I \\ &\quad - (\Sigma^t \Sigma)^{-1} C_i \frac{J_{W^*r}}{W^* J_{W^*W^*}} - (\Sigma^t \Sigma)^{-1} C_y \frac{y^* J_{W^*y^*}}{W^* J_{W^*W^*}} \end{aligned} \quad (37)$$

となる。最初の項は Merton (1971) の近視眼的な項、第 2 項は金利変動に対するヘッジ項、第 3, 4, 5 項は物価指数変動に対するヘッジ項、第 6 項は期待インフレ率の変動に対するヘッジ項、最後の項は所得に対するヘッジ項を表している。

この時、補題 2 と補題 3 より下の定理が示される。

定理 1 価値関数は下式の通りである。

$$J(W_t^*, r_t, i_t, y_t^*, t) = \frac{1}{1-\gamma} g(r_t, i_t, t)^\gamma (W_t^* + H^*(r_t, y_t^*, t))^{1-\gamma}. \quad (38)$$

ただし、関数 $g(r, i, t)$ は、(26) 式により定義される関数である。

さらに、この価値関数の偏微分係数を、上記 \hat{c}^* , $\hat{\pi}$ に代入すると、最適消費戦略

$$\hat{c}^* = w^{\frac{1}{\gamma}} \frac{W^* + H^*}{g} \quad \left(\Leftrightarrow \quad \hat{c} = w^{\frac{1}{\gamma}} \frac{W + H}{g} \right), \quad (39)$$

および最適投資戦略

$$\begin{aligned} \hat{\pi} = & \frac{1}{\gamma} ({}^t\Sigma)^{-1} \Lambda \frac{W + H}{W} - ({}^t\Sigma)^{-1} \sigma_r e_1 \frac{g_r}{g} \frac{W + H}{W} + ({}^t\Sigma)^{-1} \sigma_r e_1 \frac{H_r}{W} \\ & + \left(1 - \frac{1}{\gamma} \right) ({}^t\Sigma)^{-1} \sigma_I \frac{W + H}{W} + ({}^t\Sigma)^{-1} \sigma_i \frac{g_i}{g} \frac{W + H}{W} - ({}^t\Sigma)^{-1} \sigma_y \frac{H}{W} \end{aligned} \quad (40)$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned} g_r(r, i, t) &= \frac{1-\gamma}{\gamma} \left[w^{\frac{1}{\gamma}} \int_t^T b(s-t) e^{\phi(r, i, s-t)} ds + b(T-t) e^{\phi(r, i, T-t)} \right], \\ g_i(r, i, t) &= -\frac{1-\gamma}{\gamma} \left[w^{\frac{1}{\gamma}} \int_t^T c(s-t) e^{\phi(r, i, s-t)} ds + c(T-t) e^{\phi(r, i, T-t)} \right], \\ H_r(y_t, r_t, t) &= (\xi_1 - 1) y_t \int_t^T b(s-t) e^{\psi(r_t, s-t)} ds \end{aligned}$$

である。 g および H の添字は、偏微分を表している。

Henderson (2005) は、所得が平均回帰性を持つ対数正規過程に従うと仮定し、同様の手法で Merton (1971) のモデルを拡張した。また Henderson (2005) は、投資家が CARA 型効用関数を持ち、期末富のみを考慮するという仮定の下で、所得が特定の過程に従う場合、市場の完備性を仮定せずに、最適投資戦略を解析的に導出した。Wang (2006) は CARA 型効用関数を持ち、また無限期間の消費からの効用を考慮する投資家を仮定し、非完備市場での最適消費・投資戦略を導出した。ただし、これらの論文では、市場で取引されるリスク資産は株式のみを仮定している。Munk and Sørensen (2007) は、同様の手法で Sørensen (1999) のモデルを拡張することによって、市場で取引されるリスク資産が株式と債券の場合において、最適消費・投資戦略を導出している。

6 比較静学

定理 1 により得られた最適消費、投資戦略の陽な表現を用いて、数値計算による比較静学を行う。数値計算を行う際には、インフレーションと債券の相関係数 ρ_{IB} を用いて $\sigma_I = {}^t(\sigma_{Ir}, \sigma_{IS}) = {}^t(\sigma_I \rho_{IB}, \sigma_I \sqrt{1 - \rho_{IB}^2})$ としている。 σ_i, σ_y も同様である。

基礎となるパラメータは表 1 の通りである。ここでは σ_I, σ_i および σ_y はスカラーである。

表 1 基礎パラメータ

γ	3	δ	0.03	κ	0.50	\bar{r}	0.03	σ_r	0.05
λ_r	0.17	ν	0.05	σ_S	0.15	ρ_{SB}	-0.50	ρ_{IB}	-0.30
β	0.50	\bar{i}	0.02	σ_i	0.05	ρ_{iB}	-0.30	σ_I	0.05
ξ_0	0.03	ξ_1	0.50	σ_y	0.10	ρ_{yB}	-0.40	r	0.02
i	0.01	y	3,000,000	W	1,000,000	w	0.10		

投資期間は現時点 $t = 25$ から期末 $T = 65$ までの 40 年間とした。債券指数のボラティリティは、投資期間の中間にあたる時点でのゼロクーポン債のボラティリティとしている。つまり $\sigma_B = \sigma_r(1 - e^{-\kappa(T-t)/2})/\kappa$ である。以下では現時点 t 、リスク回避度 γ 、またリスクを表すパラメータ σ_I, σ_i 、および σ_y の変化に対する最適戦略の反応を見る。図では、横軸に投資期間をとり、縦軸には、富に対する株式、債券の投資割合をとっている。また実線は基礎パラメータの下での数値であり、破線および点線はパラメータを変化させた数値である。

投資期間に関する比較静学の結果の要約は、表 2 の通りである。

表 2 時間 t

最適消費額	最適株式投資割合	最適債券投資割合	銀行預金投資割合
$t \uparrow \Rightarrow \hat{c} \downarrow$	$t \uparrow \Rightarrow \pi_S \downarrow$	$t \uparrow \Rightarrow \pi_B \downarrow$	$t \uparrow \Rightarrow \pi_M \uparrow$

表 2 より、基礎パラメータの下では、投資期間の減少、つまり時間の経過とともに消費額は減少する。これは時間が経過するにつれ、富の多くの部分を占める人的資本が減少するからであり、年齢を重ねるにつれ、将来の所得を考慮に入れた消費は行い難くなっていることを示す。

図の中の、実線で示された数値より、基礎パラメータの下では、時間の経過とともに株式、債券への投資割合は、ほぼ同じ割合で単調に減少し、無リスク資産への投資割合が増加していることがわかる。つまり最適ポートフォリオから無リスク資産への、富のシフトが生じていると解釈できる。これは、インフレーションを考慮することにより、無リスク資産は実質的にリスク資産となる。そして投資期間が短くなるにつれ、将来のインフレーションの不確実性は減少し、投資対象としての無リスク資産の魅力が高まるからと考えられる。この結果は、静的なポートフォリオ理論と整合的である。

リスク回避度に関する比較静学の結果の要約は、表 3 の通りである。

表 3 リスク回避度 γ

最適消費額	最適株式投資割合	最適債券投資割合	銀行預金投資割合
$\gamma \uparrow \Rightarrow \hat{c} \uparrow$	$\gamma \uparrow \Rightarrow \pi_S \downarrow$	$\gamma \uparrow \Rightarrow \pi_B \downarrow$	$\gamma \uparrow \Rightarrow \pi_M \uparrow$

表 3 より、基礎パラメータの下では、リスク回避度が上昇するに従い、消費額は上昇する。これはリスク回避的な投資家は、将来の不確実性を嫌うため、投資よりも現在の消費をより好むからと考えられる。

図 1-2 より、基礎パラメータの下では、リスク回避度が上昇するに従い、リスク資産への投資額はほぼ同じ割合で減少し、無リスク資産への富のシフトが生じている。これは時間に関しての比較静学の場合と同様、静的なポートフォリオ理論と整合的であることを示している。

インフレーションのリスクに関する比較静学の結果の要約は、表 4、5 の通りである。

表 4 物価指数のリスク σ_I

最適消費額	最適株式投資割合	最適債券投資割合	銀行預金投資割合
$\sigma_I \uparrow \Rightarrow \hat{c} \uparrow$	$\sigma_I \uparrow \Rightarrow \pi_S \uparrow$	$\sigma_I \uparrow \Rightarrow \pi_B \uparrow$	$\sigma_I \uparrow \Rightarrow \pi_M \downarrow$

表 5 期待インフレ率のリスク σ_i

最適消費額	最適株式投資割合	最適債券投資割合	銀行預金投資割合
$\sigma_i \uparrow \Rightarrow \hat{c} \uparrow$	$\sigma_i \uparrow \Rightarrow \pi_S \uparrow$	$\sigma_i \uparrow \Rightarrow \pi_B \uparrow$	$\sigma_i \uparrow \Rightarrow \pi_M \downarrow$

表 4、5 及び図 3-6 より、基礎パラメータの下では、物価指数および期待インフレ率のリスクの変化に関して、最適消費、投資戦略はほぼ同じ変化が生ずる。基礎パラメータでは、物価指数と期待インフレ率

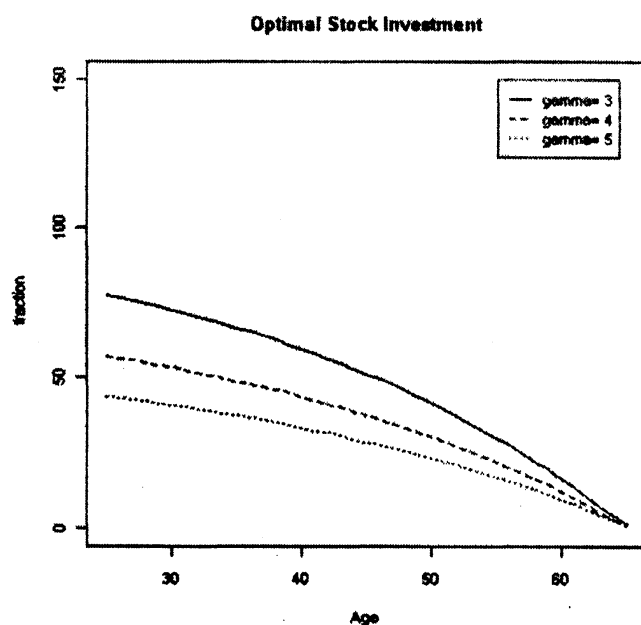


図1 リスク回避度の変化に対する最適株式投資割合の変化

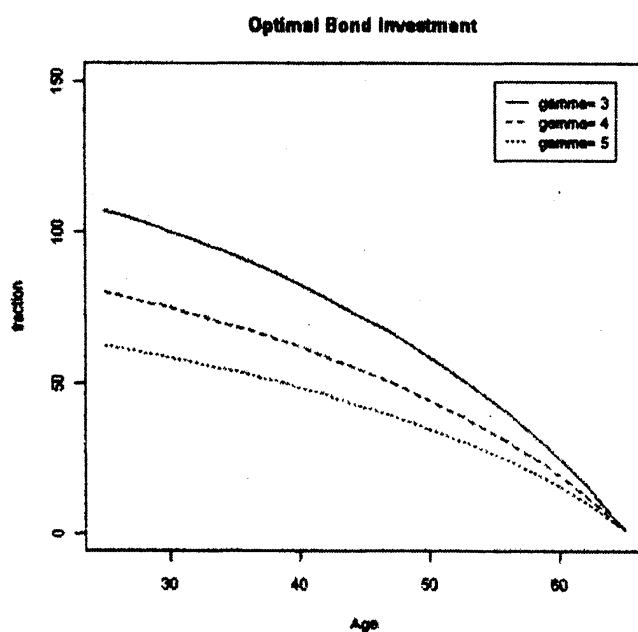


図2 リスク回避度の変化に対する最適債券投資割合の変化

は、同じ相関構造を持ち、またどちらのリスクの変化も、将来のインフレーションのリスクを変化させるという意味では同一であるので、この結果は自然である。

表4, 5より、インフレーションのリスクが増すにつれて、最適消費額は増加する。これは、リスクが増加するにつれて将来の物価の不確実性が増すため、リスク回避的な投資家は、現在により多くの消費を行うからであると考えられる。したがって、基礎パラメータの下では、リスク回避的な投資家は、インフレーションのリスクが増加するにつれて、消費額を増加させるべきである。

図3-6より、株式投資割合は、これらのリスクの上昇に従って大きく上昇するが、対して債券への投

資割合は増加するものの、その変化は株式の変化に比べると小さい。そして無リスク資産への投資割合は減少する。本稿のモデルにおいては、個人投資家の利用できる資産は名目資産のみであり、これは将来のインフレーションのリスクが上昇するにつれ、実質ベースでの資産リターンの増減幅が大きくなることを意味する。リスク回避的な投資家は、将来の実質ベースでの負のリターンを回避するために、より大きな名目リターンが期待できる資産への投資割合を増加させるとも考えられよう。したがって、基礎パラメータの下では、リスク回避的な投資家は、インフレーションのリスクが増加するにつれて、無リスク資産の投資割合を減少させ、株式への投資割合を増加させるべきである。

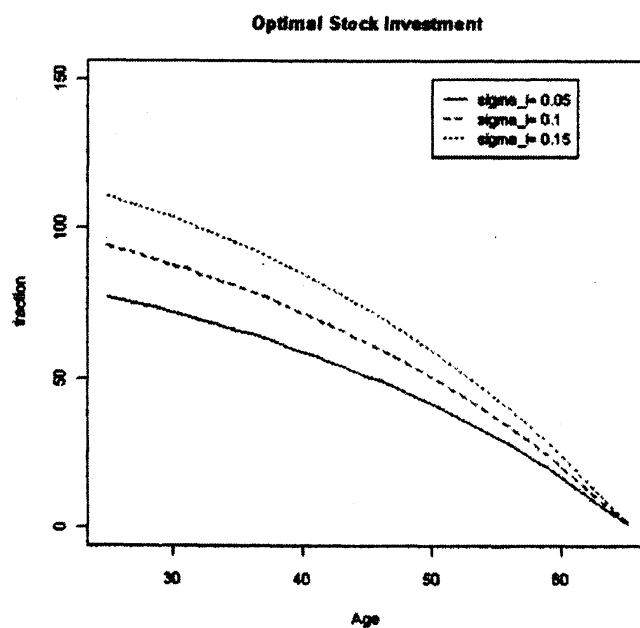


図3 物価指数のリスクの変化に対する最適株式投資割合の変化

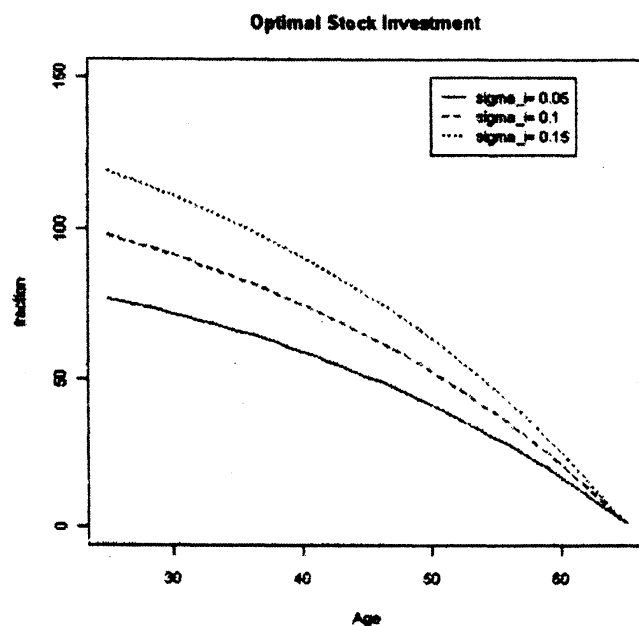


図4 期待インフレ率のリスクの変化に対する最適株式投資割合の変化

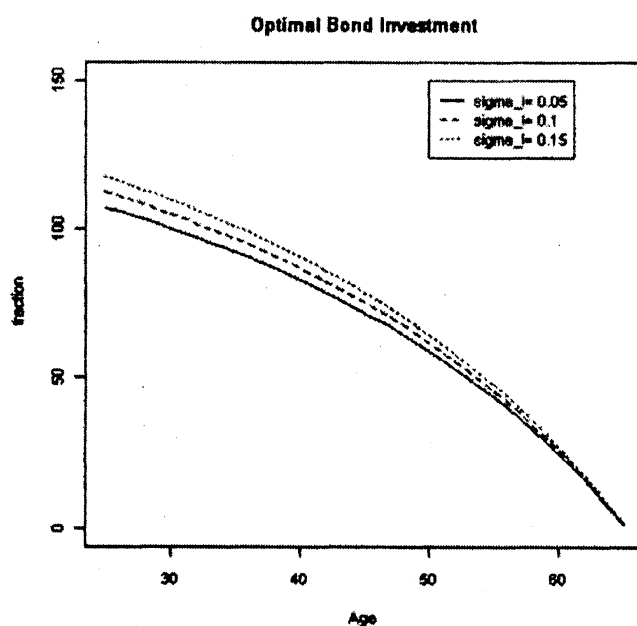


図5 物価指数のリスクの変化に対する最適債券投資割合の変化

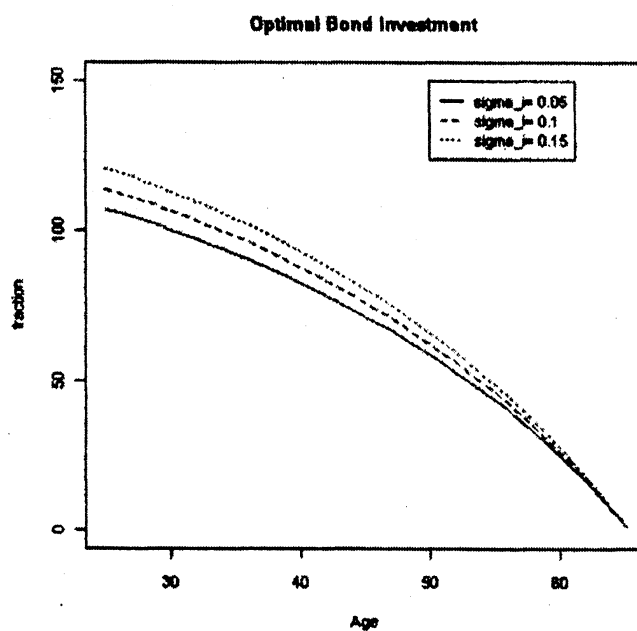


図6 期待インフレ率のリスクの変化に対する最適債券投資割合の変化

所得のリスクに関する比較静学の要約は、表6の通りである。

表6 所得のリスク σ_y

最適消費額	最適株式投資割合	最適債券投資割合	銀行預金投資割合
$\sigma_y \uparrow \Rightarrow \hat{c} \downarrow$	$\sigma_y \uparrow \Rightarrow \hat{\pi}_S \downarrow$	$\sigma_y \uparrow \Rightarrow \hat{\pi}_B \downarrow$	$\sigma_y \uparrow \Rightarrow \pi_M \uparrow$

表6より、所得のリスクが増加するにつれて、最適消費額は減少する。所得のリスクが増加することは、

自らの人的資本の不確実性が増していることを意味しており、自身の人的資本を考慮した消費が行いにくくなっていると考えられる。したがって、基礎パラメータの下で、所得水準が変化せずに、所得のリスクが増加したリスク回避的な投資家は、消費を抑制すべきである。

図 7-8 より、リスク資産への投資割合は、所得のリスクが増加するにつれて減少し、無リスク資産への投資割合は増加する。これは、富の多くの部分を占める、人的資本のリスクが増加することにより、リスク回避的な投資家は、富のリスクを減少させるために、リスク資産への投資を控えるからと考えられる。この結果は Viceira (2001) の得た結果と整合的である。したがって、基礎パラメータの下では、リスク回避的な投資家は、自らの所得のリスクが増大するにつれて、リスク資産への投資割合を減少させ、無リスク資産への投資割合を増やすべきである。

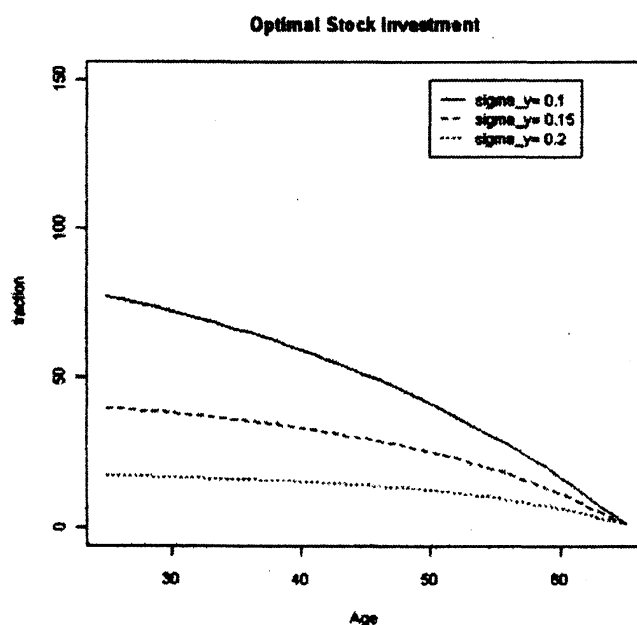


図 7 所得のリスクの変化に対する最適株式投資割合の変化

7 結論

本稿での主な仮定は以下の 3 つである、第 1 に個人投資家は CRRA 型効用関数を持つこと、第 2 に投資対象は、リスク資産として株価指数及び債券指数、無リスク資産として銀行預金であること、最後は完備市場の仮定である。本稿では、上記の仮定の下で、インフレーション及び所得が確率的な変動を持つ場合に、それらを同時に考慮したアセットアロケーション問題において、個人投資家の最適消費・投資戦略を解析的に導出した。そして得られた解析解を用いて、数値計算による比較静学を行い、特に特定のパラメータの下では、インフレーションのリスクの上昇に際して、期中消費及び期末富からの効用を最大化する個人投資家は、消費額を増加させ、また無リスク資産の投資割合を減らして、株価指数の投資割合を増やすべきであるという興味深い結果を得た。加えて、所得のリスクの上昇に際しては、消費額を減少させ、またリスク資産への投資割合を減少させ、無リスク資産の投資割合を増加させるべきであるという、先行研究と整合的であり、また直感的に理解できる結果を得た。投資期間およびリスク回避度に関する比較静学では、動的なモデルでありながら、静的なポートフォリオ理論と整合的な結果となることを示した。

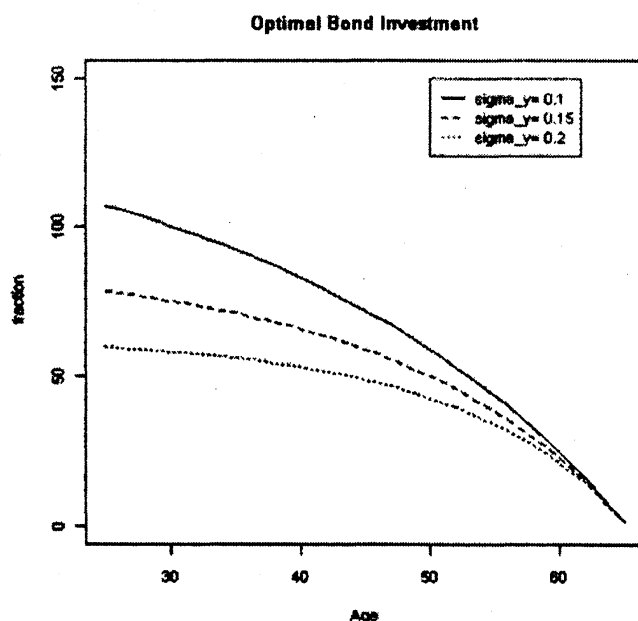


図 8 所得のリスクの変化に対する最適債券投資割合の変化

参考文献

- [1] Brennan, M., Schwartz, E., and Lagnado, R. (1997), *Journal of Economic Dynamics and Control* 21, 1377 – 1403.
- [2] Brennan, M. and Xia, Y. (2002), *Journal of Finance* 57, 1201 – 1238.
- [3] Campbell, J.Y. and Viceira, L.M. (2002), *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long Term Investors*. Oxford University Press.
- [4] Chang, F. (2004), *Stochastic Optimization in Continuous Time*. Cambridge University Press.
- [5] Henderson, V. (2005), *Journal of Economic Dynamics and Control* 29, 1237 – 1266.
- [6] Merton, R.C. (1971), *Journal of Economic Theory* 3, 373 – 413.
- [7] Merton, R.C. (1973), *Journal of Economic Theory* 6, 213 – 214.
- [8] Munk, C., Sørensen, C., and Vintner, N.V. (2004), *International Review of Economics and Finance* 13, 141 – 166.
- [9] Munk, C. and Sørensen, C. (2007), Working Paper, University of Southern Denmark.
- [10] Sørensen, C. (1999), *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 34, 513 – 531.
- [11] Viceira, L.M. (2001), *Journal of Finance* 56, 433 – 470.
- [12] Wang, N. (2006), *Journal of Monetary Economics* 53, 737 – 752.